İç çarpım uzayı V'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal küme ve V'nin boyutu da n ise, $u_1, u_2, \dots, u_n$ lineer bağımsız olduklarından, $u_1, u_2, \dots, u_n$ V için bir bazdır. Bu baza <u>ortonormal baz</u> denir. Ortonormal bazlarla çalışmak diğer bazlara göre daha kolaydır. Örneğin verilen bir v vektörünün ortonormal baza göre koordinatlarını hesaplamak daha kolaydır.

Teorem: Bir iç çarpım uzayı V'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal baz olsun. Eğer

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

ise

$$c_i = \langle u_i, v \rangle$$

dır.

Örk: $\mathbb{R}^2$'de $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$ ortonormal bazına göre $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinatlarını bulunuz.

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Sonuç 1: Bir iç çarpım uzayı V'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal baz olsun. Eğer

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad \text{ve} \quad v = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i$$

ise

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

dir.

Sonuç 2: (Parseval Formülü) Bir iç çarpım uzayı V'de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal baz ve

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

ise

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

dir.

Örk 1) $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$ ve $u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$ vektörleri $\mathbb{R}^2$'de ortonormal bazdır. $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için

$$\langle u_1, x \rangle = \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}} \quad \langle u_2, x \rangle = \frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}$$

$$x = \langle u_1, x \rangle u_1 + \langle u_2, x \rangle u_2$$

$$= \frac{x_1 + 2x_2}{\sqrt{5}} u_1 + \frac{-2x_1 + x_2}{\sqrt{5}} u_2$$

dir. Parseval Formülüne göre

$$\|x\|^2 = \left(\frac{x_1+2x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-2x_1+x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

dir.

2) $C[-\pi,\pi]$'de $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 2x\right\}$ ortonormal kümedir. $\left(\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \right)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$ integralinin değerini parseval formülünden bulunuz.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x)^2\,dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x$$

$$\|\sin^2 x\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cdot \sin^2 x\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx = \frac{3\pi}{4}$$

3) $C[-\pi,\pi]$'de $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\right\}$ ortonormal kümedir. $\left(\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \right)$

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos x\,dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x\,dx$

integrallerini hesaplayınız.

$$\left(\sin^4 x\right) = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

a) $\langle \sin^4 x, \cos x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos x \, dx$

$$= 0$$

b) $\langle \sin^4 x, \cos 4x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x \, dx$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \cos 4x \, dx = \frac{\pi}{8}$$

dir.

$(\langle \cos 4x, \cos 4x \rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\cos(4x)\, dx = 1$

Dik Matrisler

Tanım: $\mathbb{R}^n$'de sütunları ortonormal küme olan, $n \times n$ tipindeki bir Q matrisine dik matris denir.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ matrisi dik matrisdir.

Teorem: Bir $n \times n$ tipindeki Q matrisinin dik olması için gerek ve yeter şart $Q^T Q = I$ olmasıdır.

Bu teoreme göre eğer Q dik matris ise Q'nun tersi vardır ve $Q^{-1} = Q^T$ dir.

Örk: Sabit bir θ açısı için

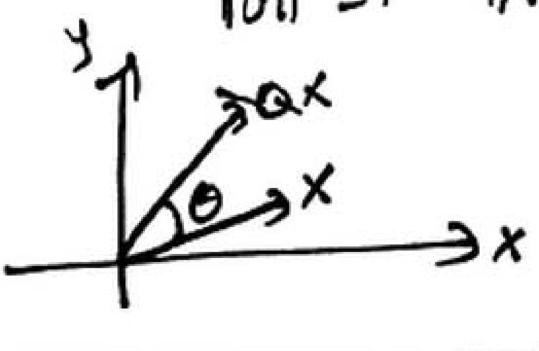
$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

diktir.

$$u = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\|u\|^2 = 1 \quad \|v\|^2 = 1$$



Örneğin $\theta = \pi/2$ ile

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Qx = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Eğer Q dik matris ise $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ dir.

Gram-Schmidt diklestirme İşlemi

Teorem: (Gram-Schmidt işlemi) $x_1, x_2, \dots, x_n$ İÇ çarpım uzayı V'de bir baz olsun.

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$$

ve

$$u_{k+1} = \frac{1}{\|x_{k+1}-p_k\|}(x_{k+1}-p_k), \quad k=1,2,\dots,n-1$$

olsun. Burada

$$p_k = \langle x_{k+1},u_1\rangle u_1 + \langle x_{k+1},u_2\rangle u_2 + \dots + \langle x_{k+1},u_k\rangle u_k$$

x_{k+1}'in span$(u_1,u_2,\dots,u_k)$ üzerine vektör izdüşümüdür. Bu durumda $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$, V'nin bir ortonormal bazıdır.

Açıklama: $x_1,x_2,\dots,x_n$ V'nin bir bazı ise

$$u_1=\frac{1}{\|x_1\|}x_1$$

alınır. span(u_1)= span(x_1) dir. p_1'i x_2'nin span u_1 üzerine vektör izdüşümünü alalım.

$p_1 = \langle x_2,u_1\rangle u_1$ dır. Bu durumda

$$x_2 - p_1 \perp u_1$$

dir.

$$x_2 - p_1 = -\frac{\langle x_2,u_1\rangle}{\|x_1\|} x_1 + x_2$$

x_1, x_2 lineer bağımsız olduklarından $x_2 - p_1 \neq 0$ dır.

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|}(x_2 - p_1)$$

$\text{span}(u_1, u_2) \subset \text{span}(x_1, x_2)$ dır. u_1 ve u_2 lineer bağımsız olduğundan $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(x_1, x_2)$ dir. p_2, x_3'ün $\text{span}(x_1, x_2) = \text{span}(u_1, u_2)$ üzerine vektör izdüşümü olsun. Bu durumda

$$p_2 = \langle x_3, u_1 \rangle u_1 + \langle x_3, u_2 \rangle u_2$$

olur ve

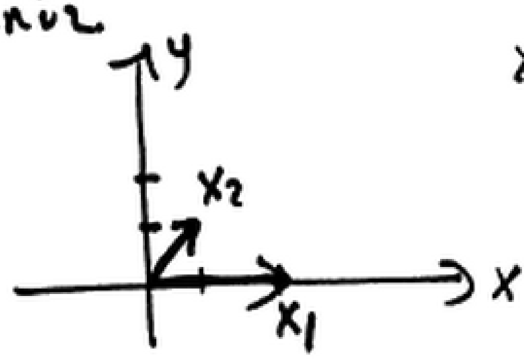
$$u_3 = \frac{1}{\|x_3 - p_2\|}(x_3 - p_2)$$

alınırsa u_1, u_2, u_3 ortonormal kümedir. Böyle devam edilirse $u_1, u_2, \dots, u_n$ ortonormal bazdır.

Örnek 1) $\mathbb{R}^2$'de standart iç çarpıma göre

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bazını ortonormal baza dönüştürünüz.



$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|x_1\|^2 = 4 \Rightarrow \|x_1\| = 2$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = e_1$$

$$p_1 = \langle x_2, u_1\rangle u_1 \qquad \langle x_2, u_1\rangle = 1$$

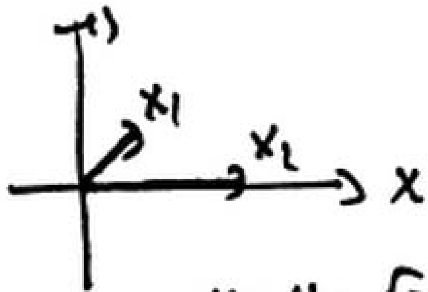
$$p_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad x_2 - p_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|}(x_2 - p_1) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = e_2$$

$\{u_1, u_2\} = \{e_1, e_2\}$ ortonormaldir.

1') $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \right\}$ alınırsa $\{u_1, u_2\}$ farklı ortonormal baz olur.

$$x_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$



$$\|x_1\|^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \|x_1\| = \sqrt{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$p_1 = \langle x_2, u_1\rangle u_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$x_2 - p_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \qquad \|x_2 - p_1\| = \sqrt{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p_1\|}(x_2 - p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

2) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ olmak üzere iç çarpım

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)\, q(x_i)$$

ile tanımlanan iç çarpım uzayı P_3'de bir ortonormal baz bulunuz.

$\{1, x, x^2\}$ bazını olarak Gram-Schmidt dikleştirme işlemi ile ortonormal baz üretebiliriz

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \sum_{i=1}^{3} 1^2 = 3 \qquad \|1\| = \sqrt{3}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|1\|}\, 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p(x) = x \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_1 = \langle x, \tfrac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \langle x, \tfrac{1}{\sqrt{3}} \rangle = (-1)\frac{1}{\sqrt{3}} + 0\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_1 = 0 \qquad = 0$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x\|} x \qquad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (-1)(-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$u_2 = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$p_2 = \langle x^2, \tfrac{x}{\sqrt{2}} \rangle \frac{x}{\sqrt{2}} + \langle x^2, \tfrac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}}$$

341

$$\langle x^2, \tfrac{x}{\sqrt{2}} \rangle = (-1)^2 \cdot \left(\tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 0$$

$$\langle x^2, \tfrac{1}{\sqrt{3}} \rangle = (-1)^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

$$p_2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|x^2 - \frac{2}{3}\|} \left(x^2 - \tfrac{2}{3}\right)$$

$$\|x^2 - \tfrac{2}{3}\|^2 = \langle x^2 - \tfrac{2}{3}, x^2 - \tfrac{2}{3} \rangle = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} = \tfrac{2}{3}$$

342

$$u_3 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \left(x^2 - \tfrac{2}{3}\right)$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$, P_3'de ortonormal bazdır.

3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın sütun uzayının bir ortonormal bazını bulunuz.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$ alırsak

x_1, x_2, x_3 lineer bağımsız olduğundan A'nın sütun uzayı, $\mathbb{R}^4$'ün iç boyutlu bir alt uzayıdır.

$$\|x_1\|^2 = \langle x_1, x_1 \rangle = 1^2+1^2+1^2+1^2 = 4$$

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \langle x_2, u_1 \rangle u_1 \qquad \langle x_2, u_1 \rangle = 3$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$x_2 - P_1 = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} \qquad \|x_2 - P_1\|^2 = \frac{100}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - P_1\|} (x_2 - P_1) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \langle x_3, u_2 \rangle u_2 + \langle x_3, u_1 \rangle u_1$$

$$\langle x_3, u_2 \rangle = -2$$

$$\langle x_3, u_1 \rangle = 2$$

$$P_2 = -2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3 - P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

345

$$\|x_3 - p_2\|^2 = 16$$

$$u_3 = \frac{1}{\|x_3 - p_2\|}(x_3 - p_2) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$, sütun uzayının bir ortonormal bazıdır. Yani $R(A)$'nın bir ortonormal bazıdır.

346